مقاله

ردپای مبهم اعداد گنگ در ذهن دانش‌آموزان

بهناز ساویزی، دکترای ریاضی و دبیر ریاضی تهران
احمد شاهورانی‌سمنانی، دکترای آموزش ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

کلیدواژه‌ها: اعداد گنگ، مجموعهٔ اعداد حقیقی، بازنمایی اعداد گنگ، محور اعداد، برنامهٔ درسی متوسطه

برنامهٔ درسی ریاضیات در کشور ما، عمدتاً مبتنی بر توسعهٔ مفاهیم و روابط مرتبط با مجموعهٔ اعداد حقیقی شکل گرفته است. مفاهیم مربوط به مجموعهٔ اعداد حقیقی، با معرفی اعداد حسابی و طبیعی و روابط بین آن‌ها در این برنامه، از دبستان آغاز می‌شود و با ورود تدریجی اعداد گویا، صحیح و گنگ تا دوره‌های راهنمایی و دبیرستان گسترش می‌یابد. شواهد گوناگون نشان می‌دهد که برای دانش‌آموزان دشواری‌ها، ابهامات و بدفهمی‌هایی برای طی آخرین پله، یعنی وارد شدن به اعداد گنگ و عبور از مفهوم عدد گویا به عدد حقیقی، وجود دارد. هدف این نوشتار بررسی این دشواری‌ها و بدفهمی‌هاست. ما به‌عنوان معلم و محقق، بارها شاهد بوده‌ایم که در انتهای حل یک مسئله که پاسخ آن یک عدد گنگ بوده است، دانش‌آموزان پرسیده‌اند: «آیا باید جای π عدد بگذاریم؟» یا «آیا باید مقدار $\sqrt{2}+3$ را حساب کنیم؟». چنین مشاهداتی این پرسش را به ذهن متبادر می‌سازد که آیا دانش‌آموزان اساساً کمیت‌های گنگ را، همچون دیگر انواع اعداد، درک می‌کنند و به رسمیت می‌شناسند؟ آیا این‌گونه کمیت‌ها از نظر آن‌ها واقعاً عدد است؟ اگر هست، چرا به دنبال جایگزینی مقدار دیگری به‌جای اعداد گنگ هستند و اگر نیست دلیل آن چیست؟ جهت روشن شدن این موضوع بود که تحقیق حاضر در سال تحصیلی ۹۰-۹۱ انجام گرفت (ساویزی، ۱۳۹۱). گروه مورد مطالعه، دانش‌آموزان دختر پایهٔ دوم نظری در یکی از مدارس دخترانه یکی از ناحیه‌های آموزشی تهران بودند. در اینجا بدون پرداختن به جزئیات تحقیق تنها نتایج بیان می‌شوند. به‌طور کلی می‌توان علل برخی از بدفهمی دانش‌آموزان از اعداد گنگ را به‌شرح زیر خلاصه نمود:

۱. روش بازنمایی اعداد گنگ، جایگزینی تقریب‌های اعشاری؛

۲. رویکرد نامنسجم و گاه مبهم کتب درسی در معرفی اعداد گنگ؛

۳. شکل گستردهٔ بازنمایی اعداد گنگ مربعی؛

۴. غلبهٔ جنبهٔ فرایندی و عملیاتی بر جنبهٔ ساختاری[۱] و شیءگونی[۲] (عینی) اعداد گنگ در ذهن دانش‌آموزان؛

۵. عدم درک و برداشت مناسب از کارکرد محور اعداد به‌عنوان مدلی که اعداد را از فضای مجموعه‌ها و حساب به فضای اندازه‌ها و هندسه منتقل و مرتبط می‌سازد.

البته برخی موارد فوق از ارتباط علت و معلولی برخوردار بوده و برخی نیز با یکدیگر هم‌پوشانی دارند. در ادامه به شرح هر یک پرداخته خواهد شد.

در بخشی از تحقیق صورت گرفته، دو پرسش از دانش‌آموزان، به قرار زیر مطرح شد:

۱. برداشت شما از عدد گنگ چیست؟

۲. هر یک از اعداد $\sqrt{2}+1$، $\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

در پاسخ به پرسش اول، دانش‌آموزان تعریف‌های خودساخته‌شان را از اعداد گنگ بیان نموده بودند. در

واقع، با گذشت بیش از یک سال از آشنایی آن‌ها با اعداد گنگ، تعریف‌های رسمی و دانش الگوریتمی آن‌ها در رابطه با اعداد گنگ فراموش شده بود و آنچه بیان کرده بودند، نمایان‌گر برداشت و ادراک شخصی ایشان از موضوع بود که در ذهنشان ته‌نشین شده و باقی مانده بود. پاسخ‌ها به پرسش اول با نرم‌افزار تحلیل متن Maxqda10 تحلیل و کدگزاری شد. سه کد استخراج شده شامل «عملیات»، «بازنمایی» و «تعلق» بود.

برخی دانش‌آموزان عدد گنگ را **عددی با بخش اعشاری نامتناهی** و برخی نیز آن را عددی تعریف کرده بودند که **بازنمایی به‌صورت کسر متعارفی** ندارد. برچسب یا کد «**بازنمایی**» به این‌گونه تعریف‌های خودساختهٔ دانش‌آموزان تعلق گرفت. برخی دانش‌آموزان بیان کرده بودند که اعداد گنگ، اعدادی هستند که **جذر کامل ندارند** یا اعدادی هستند که **بین آن‌ها عملیات حسابی، مثل جمع یا تفریق، انجام نمی‌شود** (مثل $\sqrt{ک}+\sqrt{ک}$). تأکید بر عمل جذرگیری یا جمع و تفریق معیاری بود تا این تعریف‌ها با کد «**عملیات**» مشخص شوند؛ و بالاخره تعریف‌هایی از قبیل اینکه اعداد گنگ «اعداد مشخص و کاملی نیستند»، «اعدادی نامفهوم و نادقیق‌اند»، «عدد حقیقی‌اند» و «عدد حقیقی نیستند» در کد «**تعلق**» جای گرفتند. منظور از این کد، تعلق داشتن یا نداشتن عدد گنگ به یک مجموعهٔ مشخص در ذهن دانش‌آموزان بود. بیشترین اظهارات دانش‌آموزان در کد «**عملیات**» جای گرفت که خود نشان از دیدگاه فرآیندی و عملیاتی ایشان دارد.

روش بازنمایی اعداد گنگ: جایگزینی تقریب‌های اعشاری

یکی از دلایل بدفهمی دانش‌آموزان، جایگزینی غیرضروری تقریب‌های اعشاریِ اعداد گنگ تشخیص داده شد. نتیجهٔ بررسی‌ها نشان داد که بسیاری از دانش‌آموزان، عبارت‌های $\sqrt{۲}+۱$ ، $\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}+\sqrt{۵}$ را با بازنمایی اعشاری روی محور اعداد نمایش داده بودند. البته تعداد افرادی که عبارت $\sqrt{۲}+۱$ را با روش هندسی روی محور نشان داده بودند، بیشتر از دیگر موارد بود و این شاید به‌دلیل بیشتر بودن تعداد تمرین‌های کتاب آن‌ها برای نمایش اعدادی به‌شکل $\sqrt{ک}+ک$ باشد. تعداد زیادی از دانش‌آموزانی که اعداد گنگ را با بازنمایی اعشاری تعریف کرده بودند، برای یافتن مکان عبارت روی محور اعداد، از بازنمایی اعشاری استفاده نموده بودند. این دسته از دانش‌آموزان اعداد گنگ را اعدادی مبهم، نامعلوم، نادقیق و ناکامل دانسته و مکان آن‌ها را روی محور اعداد، تقریبی معرفی کرده بودند. به‌نظر می‌رسد بین بازنمایی اعشاری اعداد گنگ و بدفهمی ذکر شده ارتباط مستقیمی وجود دارد. یعنی جایگزینی تقریب‌های اعشاری توسط دانش‌آموزان، اغلب اوقات حس ناکامل بودن، نادقیق بودن و نامعلوم بودن اعداد گنگ را به ذهن ایشان متبادر می‌سازد. در اینجا به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان انعطاف لازم را در ایجاد ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف عدد ندارند و ساخت هندسی «اعداد گنگ مربعی» به کمک رابطهٔ فیثاغورس، که در سال اول دبیرستان آموخته‌اند، بیشتر دانشی است الگوریتمی، معمولی و غیرمرتبط با یافتن نقاط متناظر با اعداد گنگ روی محور اعداد.

شواهد گوناگون نشان می‌دهد که برای دانش‌آموزان دشواری‌ها، ابهامات و بدفهمی‌هایی برای طی آخرین پله، یعنی وارد شدن به اعداد گنگ و عبور از مفهوم عدد گویا به عدد حقیقی، وجود دارد

رویکرد کتاب درسی

کتاب‌های درسی نیز در ایجاد بدفهمی‌های مرتبط با اعداد گنگ بی‌تأثیر نیستند. اینکه دانش‌آموز مفهوم عـدد گنگ را به مفهوم عدد گویا تقلیـل داده و از آن به‌عنــوان یک عدد گویای نادقیق و تقریبی یاد می‌کند بی‌ارتباط با نحوهٔ آموزش کتاب درسـی او نیسـت. در کتاب ریاضیات (۱) دبیرستان، اعداد گنگ در بخشی با عنوان اعداد حقیقی مطرح شـده‌اند. در آنجا بیان شده است که روی محور اعداد حقیقی، نقاطی وجود دارند که متعلق به هیچ یک از اعداد گویا نیستند، بلکه این نقاط مربوط به اعداد گنگ هسـتند. در ادامه هم بیان شده است: «با اسـتفاده از نماد $\sqrt{}$ که به‌معنای جذرگیری است، اعداد گنگ بسیاری را می‌توان معرفی نمود.» در هیچ کجای کتاب بیان نشده (و مثالی نیز آورده نشده) که عدد گنگ، عددی اسـت که نتـوان آن را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح[۳] (با مخرج غیر صفر) یا یک کسر تحویل‌ناپذیر نوشت. در ضمن، توضیح در مورد کاربرد جذرگیری رادیکال، تفکر فرایندی و عملیاتی را تقویت می‌کند. وجود این نگاه در مؤلفان کتاب ریاضیات (۱) در رابطه با اعداد گنگ مربعی و نماد رادیکال، می‌تواند نشـان از نگاه و تفکر فرایندی این مؤلفان داشته باشد و این‌گونه توضیحات، کمکی در جهت ایجاد یک شئ مستقل ذهنی از اعداد گنگ نمی‌نماید.

در بخـش تقریب‌های اعشـاری صفحـهٔ ۱۸ کتاب ریاضیات (۱)، چهار عدد و تقریب‌های اعشاری آن‌ها مورد بررسـی قرار گرفته اسـت. احتمالاً منظور مؤلفان از این قسمت بیان این مطلب بوده که «همواره دنباله‌ای از اعداد گویا وجود دارد که به یک عدد گویا یا گنگ همگراست و بالطبع، معرف آن عدد می باشد». ولی نحوهٔ بیان مطلب بسـیار ابهام برانگیز است، به‌گونه‌ای که به نظر نمی‌رسد خوانندهٔ متن بتواند تمایزی بین اعداد گنگ و گویا قائل شود. در ابتدا بیان شده «۱/۴ به $\sqrt{۲}$ نزدیک است، ۱/۴۱ نزدیک‌تر و ۱/۴۱۴ به $\sqrt{۲}$ بیشتر نزدیک است. این اعداد اعشاری را تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۲}$ می‌نامند. برای هر عدد حقیقی می‌توان از این تقریب‌های اعشاری یافت و هرچه عدد اعشاری به عدد حقیقی نزدیک‌تر باشد، دقت تقریب بالاتر اسـت». در ادامهٔ مطلـب آمده «$\frac{۱}{۳}$ برابر هیچ عدد اعشاری نیست ولی می‌توانیم تقریب‌های اعشاری آن را به‌دست آوریم. $\frac{۱}{۳}$ با دقت یک رقم اعشاری برابر است با ۰/۳ و با دقت دو رقم اعشار برابر است با ۰/۳۳ و با دقت سه رقم اعشار برابر است با ۰/۳۳۳. دقت این تقریب‌ها را هر چقدر بخواهیم، می‌توانیم بالا ببریم».

بیان مطالب فوق به‌گونه‌ای اسـت که هیچ تمایزی بین عدد گنگ و عدد گویا ایجاد نمی‌کند. به‌نظر می‌رسد مؤلف یا مؤلفان این بخش، به ساختار یک دنبالهٔ نامتناهی همگرا به یک عدد حقیقی و نیز مفهوم حد در بی‌نهایت توجهـی ننموده‌اند. اینکه $\sqrt{۲}$ را با یـک نگاه کل‌نگرانه، حـد یا جمع‌بندی نهایی یک دنبالـهٔ نامتناهی از اعداد گویا تلقی کنیم که بازنمایی اعشاری مختوم یا متناوب ندارد، با دیدگاهی که دنبالهٔ مذکور هر بار به‌طور مقطعی و جزئی مورد توجه قرار گیرد، تفاوت دارد. با دیدگاه دوم، عدد گنگ (و حتی اعداد گویا به‌ویژه با بازنمایی اعشاری متناوب) همـواره نادقیق و ناکامل به‌نظر می‌رسـند (و بیشتر فرایند هستند تا شئ مستقل).

در توضیحات ارائه شـده در مورد $\frac{۱}{۳}$ نیز ابهاماتی در کتـاب درسـی وجـود دارد. در کتاب بیان شـده اسـت کـه «$\frac{۱}{۳}$ برابر هیچ عدد اعشـاری نیسـت». با ایـن وصف عددی با بازنمایی اعشـاری ...۰/۳۳۳ باید عددی گنگ باشـد زیرا با هیچ کسر متعارفی مساوی نیست[۴]، در حالی که می‌توان نشان داد: «هر کسر گویای $\frac{ع}{ع}$ به‌صورت یک عدد اعشـاری پایـان‌دار یا یک عدد اعشـاری دوره‌ای نامتناهی قابل بیان اسـت؛ به عکس هر بسط اعشاری پایان‌دار یا دوره‌ای نامتناهی، مساوی عدد گویایی اسـت» (نیـون، ۱۳۶۷). به‌دنبال آن، در مسـئله هفتم از مسـائل صفحهٔ ۲۰ کتاب، چهار کسر گویا مطرح و پرسیده شده است: «در بین اعداد گویای زیر، عددهایی را که اعشـاری هسـتند مشخص کنید و ...». منظور این پرسـش، احتمالاً مشـخص نمودن کسرها با بازنمایی اعشاری مختوم (پایان‌دار) می‌باشد. ولی صورت سـؤال این ابهام را برمی‌انگیزد که همواره کسرهای گویایی وجود دارند که هیچ بازنمایی اعشاری ندارند و این‌گونه کسـرها تنها تقریباً (نه دقیقاً) با یک عدد اعشاری برابرند. رویکرد آموزشی کتاب به‌گونه‌ای

است که به‌جای توسعهٔ مجموعهٔ اعداد گویا به مجموعهٔ اعداد حقیقی، به‌لحاظ مفهومی، مجموعهٔ اعداد حقیقی را بــه مجموعهٔ اعداد گویا تحدید نموده و این از طریق تأکید بر تقریبات اعشاری، صورت پذیرفته است.

تأثیر ایــن دیدگاه را بــر بدفهمــی دانش‌آموزان، می‌توان در مثال ۱ دید.

در مورد فوق، دانش الگوریتمیِ ساختِ هندسیِ اعداد گنــگِ مربعی به‌کار دانش‌آموز نیامــده و در عوض تأکید بــر عملیــات و فرایند جذرگیری موجــب تناقض و ابهام دانش‌آموز شــده اســت. با رویکرد آموزشی کتاب درسی، انتظار چنین تصوری از جانب دانش‌آموز بعید نیست، زیرا

لازم اســت در مورد اصطلاح «پذیرش عدم بسته بودن بازنمایی» توسط دانش‌آموزان توضیحاتی داده شود. این اصطلاح، اولین بار توسط کولیس[۵] به‌کار برده شد.

کولیس، بســتگی[۶] در بازنمایــی را در چهار مرحله تقسیم‌بندی می‌نماید. در مرحلهٔ اول دانش‌آموز تنها با جایگزین کردن یک عبارت گسترده، مانند جمع دو عدد، با حاصل جمع که یک عدد اســت آشناست. در عبارت $x=۶+۳$ حالت عملیاتی با جایگزین کردن عدد ۹ به حالت شیءگونی یا محصولی تبدیل می‌شود. در این مرحله، دانش‌آموز به‌طور همزمان، مفهوم عبارت گستردهٔ عدد را بــه دو گونه محصول و فرایند شناســایی نمی‌کند.

رویکرد آموزشی کتاب ریاضیات ۱ به‌گونه‌ای است که به‌جای توسعهٔ مجموعهٔ اعداد گویا به مجموعهٔ اعداد حقیقی، به‌لحاظ مفهومی، مجموعهٔ اعداد حقیقی را به مجموعهٔ اعداد گویا تحدید نموده و این از طریق تأکید بر تقریبات اعشاری، صورت پذیرفته است

مثال ۱

آیا می‌توان $\sqrt{۲}+۱$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

بله ولی وقتی جذر می‌گیریم $\sqrt{۲}$ جذر کامل ندارد پس وقتی جذر کامل ندارد و اعشارهایش معلوم نیست تا کجا ادامه دارد پس چطور می‌توان به طور دقیق محاسبه کرد که کجا وجود دارد ؟!!

توجه او هم به‌جای جمع‌بندی و محصول نهایی به‌عنوان یک عدد گنگ، به فرایند پایان‌ناپذیر بسط اعشاری معطوف گشته و بنابراین، دانشِ الگوریتمیِ ساختِ هندسیِ عدد در عمل فایده و کارآیی اصلی خود را،که همان مکان‌یابی روی محور اعداد است، از دست داده است.

شکل گستردهٔ اعداد گنگ مربعی

در مطالعــهٔ صورت گرفتــه ، بازنمایی اعشــاری و جایگزینی آن با تعریف اولیهٔ اعداد گنگ، یکی از دلایل بدفهمی دانش‌آموزان شناخته شد که با نتایج تحقیقات بین‌المللی نیــز مطابقت دارد (زازکیس و ســیروتیک، ۲۰۰۴؛ ســیروتیک و زازکیــس، ۲۰۰۷؛ زازکیــس و سیروتیک، ۲۰۱۰؛ پِلِد و هرشکو وتیز، ۱۹۹۹ و فوسکوگلو و کسیواس، ۲۰۱۱.) و در عین حال، بررسی حل تکالیف دانش‌آموزان نشان داد جایگزینی اعداد گنگ مربعی با تقریبات اعشاری، یک عادت همیشگی در دانش‌آموزان نیســت، بلکه به نوع اعداد نیز وابســته است. در اینجا

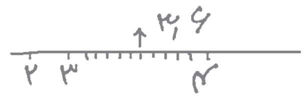
برای مثال، دانش‌آموز در این مرحله، جای خالی را در عبارت $۲+\square=۶+۳$ با عدد ۹ پر می‌کند. کولیس سه مرحله دیگر را نیز در رابطه با بازنمایی عدد بیان کرده است. در مرحلهٔ دوم فرد قادر است با عناصر ترکیبی کار کند، بی‌آنکه لازم باشد جواب یا عددی یکتا جایگزین آن‌ها کند. مثلاً بدون محاســبهٔ جواب، درستی عبارت $۵+۸>۳+۲$ را می‌فهمد. در این مرحله قادر است بیش از یک عملگر را به‌کار بَرَد، مثل: $۳-۴+۱$. دانش‌آموزان در مقاطع پایین‌تر، در «پذیرش عدم بسته بودن» بازنمایی یا ALC[۷]، مشکل دارند (کولیس، ۱۹۷۵). این مشکل در توسعهٔ درک جبری دانش‌آموزان دیده می‌شود، مثلاً دانش‌آموزی که مشکل در ALC دارد، مایل است معادلهٔ $?=۳+۷x$ را با $۱۰x$ جایگزین نماید.

در مثال ۲، دانش‌آموز برای نمایش $\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$ روی محور اعداد، تقریبات اعشــاری را جایگزین کرده است تا به عددی با بازنمایی بســتهٔ ۳/۶ برسد. وی در مورد $\sqrt{۲}+۱$ ، رابطهٔ فیثاغورس را به‌کار برده است.

مثال ۲

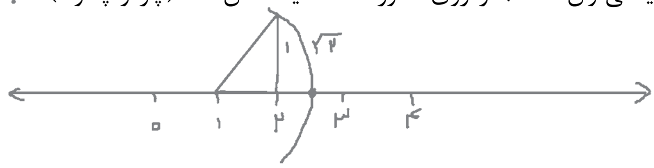
آیا می‌توان $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

$\sqrt{2}+\sqrt{5}=1/4+2/3=3/6$



آیا می‌توان $1+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟ بله

$1+\sqrt{2}=1^2+1^2$

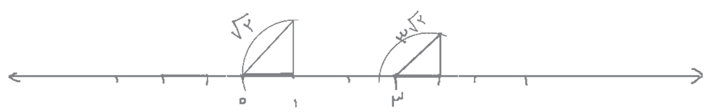


مثال ۳

آیا می‌توان $3\sqrt{2}+\sqrt{2}$ را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

احتمالاً بتوانیم آن را روی محور نشان دهیم ولی به صورت جداگانه می‌شود نشان داد تا شاید اعداد را از فرمول رادیکال بتوانیم درآوریم و باهم جمع کنیم

$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$



مثال ۴

آیا می‌توان $3\sqrt{2}+\sqrt{2}$ را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

$\sqrt{2}$ را بله ولی $3\sqrt{2}$ را می‌توان نشان داد

آیا می‌توان $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟ به تنهایی بله ولی باهم نه

آیا می‌توان $1+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟ بله

همان‌گونه که گفته شد، تغییر رویکرد دانش‌آموز در مورد سؤال دوم، شاید مربوط به نوع تمرین‌های کتاب باشد.

در مورد مثال ۳، دانش‌آموز توضیح داده است که عدد به‌شکل داده شده را تنها به صورت جداگانه می‌توان روی محور نمایش داد. به‌عبارتی، وی کل عبارت را به شکل دو بخش یا دو عدد جداگانه فرض کرده و نمایش یک‌جای عدد را منوط به جایگزینی تقریب اعشاری، جمع دو بخش و رسیدن به یک عدد نهایی (با بازنمایی بسته) دانسته است. در مورد مثال ۴ نیز، شکل گستردهٔ بازنمایی اعداد، سبب شده تا دانش‌آموز، نمایش یک‌جای عدد را روی محور، امکان‌ناپذیر بداند.

غلبهٔ جنبهٔ فرایندی و عملیاتی بر جنبهٔ ساختاری و محصولی

همان‌گونه که پیش‌تر بیان شد، مشکلات ذکر شده در رابطه با اعداد گنگ مربعی گاهی هم‌پوشانی داشته و گاه رابطهٔ علت و معلولی دارند. به‌نظر می‌رسد بین عدم پذیرش شکل گستردهٔ عدد گنگ و غلبهٔ جنبهٔ فرایندی و عملیاتی در ذهن دانش‌آموزان، ارتباطی وجود دارد. برای حصول اطمینان از این ارتباط، سؤال زیر مطرح و پاسخ‌ها بررسی شد.

« $\sqrt{۷}+۲$ » چیست؟

در اینجا نیز لازم است به‌طور کوتاه، توضیحاتی در رابطه با اصطلاحات **فرهوم**، **فرایند** و **شیء ذهنی** آورده شود. البته در شماره‌های پیشین این مجله، به بحث مذکور پرداخته شده است و توضیحات آتی، جنبهٔ یادآوری دارد (پگ و تال، ۲۰۰۵).

نظریات شئ- فرایندی در آموزش ریاضیات عنوان کلی، نظراتی همچون APOS[۸] ، شئ انگاری[۹] اسفارد[۱۰] و فرهوم[۱۱] تال[۱۲] و گری[۱۳] می‌باشد. این‌گونه نظریه‌ها، نحوهٔ شکل‌گیری یک مفهوم ریاضی را در ذهن دانش‌آموز شرح می‌دهند و از نوع نظریه‌های موضعی آموزش ریاضیات می‌باشند. افراد مختلف، نظرات (موضعی) گوناگونی را در رابطه با شکل‌گیری مفهوم ارائه داده‌اند (انگلیش و سِریرامن، ۲۰۱۰). پیاژه بین تجرید تجربی[۱۴] (از اشیاء درک و مشاهده شده) و تجرید نیمه تجربی[۱۵] (از فعالیت‌های صورت گرفته روی اشیاء درک شده) تمایز قائل می‌شود (تال، ۱۹۹۹). تجرید تجربی از مشاهده و حس کردن پدیده‌ها در جهان واقعی حاصل می‌شود و در تجرید نیمه‌تجربی، استخراج دانش از طریق تجرید فرایند عملیات و انجام فعالیت روی اشیاء صورت می‌پذیرد. تال و گری (۱۹۹۹) تمایزی بین اشیاء **درک‌شده**[۱۶] و اشیای **حس‌شده**[۱۷] قائل می‌شوند. اشیای حس‌شده، تجریدی از اشیاء در جهان واقعی هستند؛ مثل اشکال هندسی. دایره تجریدی از **اشیاء به‌ظاهر گرد** و خط تجریدی از **یک امتداد راست** در جهان واقعی و فیزیکی است. نوع دیگر یعنی اشیای ذهنی درک شده، بر اثر تأمل روی فعالیت‌ها و تأکید بر روند فرایندها حاصل می‌شوند. مثلاً تجریدی از شمارش تعداد اشیای واقعی، منجر به ساخت مفهوم عدد می‌شود. تال و گری (۱۹۹۹)، بین «رویه[۱۸]» و «فرایند[۱۹]» تمایزی قائل می‌شوند. رویه یک الگوریتم یا روش گام‌به‌گام است که در آن، هر گام پس از تکمیل گام قبلی برداشته می‌شود. فرایند ترکیبی از چندین رویه (همسو و هم‌اثر) است، بدون آنکه به جزئیات گام‌ها توجهی شود. اینکه یک مفهوم همزمان، هم فرایند و هم شیء ذهنی محسوب شود، کمی مبهم و پیچیده به‌نظر می‌رسد. ساده‌ترین وسیله این است که یک نقطه‌نظر مشترک و یکسان از مفهوم شیء و فرایند ارائه دهیم. در سرتاسر ریاضیات، از این ترکیب‌ها، فراوان می‌توان یافت:

فرایند شمارش و مفهوم عدد؛ می‌توان ۷ شیء را شمارش کرد و یا ۷ را یک عدد مستقل پنداشت.

فرایند شمارش چند چیز و مفهوم جمع (حاصل جمع)؛ ۵+۴ یک فرایند شمارش برای دو چیز است در عین حال یک حاصل جمع و عدد ۹ می‌باشد؛ فرایند تقسیم دو عدد طبیعی و یا یک کسر به‌عنوان یک شیء (۴/۳).

تال و گری (۱۹۹۹) ادعا می‌کنند که نمادهای ریاضی، اغلب حاوی دو جنبهٔ فرایندی و مفهومی هستند. آن‌ها واژهٔ ترکیبی و جدید «فرهوم» مرکب از فرایند و مفهوم را برای این مورد ابداع کرده‌اند. فرهوم نمادگزاری یا نمادی است که هر دو جنبهٔ فرایندی و مفهومی را دربردارد.

برای مثال، ۳+۴ یک فرهوم است. «شمارش همه[۲۰]» و «شمارش یکجا[۲۱]» را می‌توان دو رویه یا تکنیک جمع دانست. «شمارش همه» برای ۳ و ۴، حالت «فرایند، فرایند» را به‌وجود می‌آورد. شمارش یکجای ۳ (۴) و شمارش همه ۴ (۳) حالت «فرهوم - فرایند[۲۲]» را ایجاد می‌کند. جمع یکجا برای دو عدد، حالت «فرهوم - فرهوم[۲۳]» را ایجاد می‌کند. شکل‌های ۱و۲، موضوع را روشن‌تر می‌کند:

در پاسخ به پرسش اخیر، تنها ۵ درصد از دانش‌آموزان، عبارت مورد پرسش را به‌عنوان یک حقیقت شناخته شده[۲۴] یا یک عدد گنگ معرفی کرده بودند. به‌عبارتی جنبهٔ فرهوم- فرهوم را درک کرده بودند. مثال ۵، پاسخ دانش‌آموزی است که از عبارت داده شده، درک فرهوم- فرایندی دارد یعنی $\sqrt{۷}$ را

یک عدد گنگ دانسته، در حالی‌که علامت جمع را بخشی از بازنمایی عدد گنگ محسوب نکرده و کل عبارت را یک فرایند جمع ارزیابی نموده است. در حالت فرایندی- فرایندی[۲۵]، دانش‌آموزان چنین پاسخ داده بودند که جذر یک عدد، با ۲ جمع شده است.

عدم درک کارکرد محور اعداد

محور اعداد، مدلی کارآمد جهت شناخت بهتر اعداد و بسیاری از مفاهیم ریاضیات است. فرودنتال[۲۶] (۱۹۷۳)، سه کاربرد را برای محور اعداد نام می‌برد. اول، به‌عنوان یک خط‌کش که نقاط روی آن، مکان ثابتی دارند. دوم، خطی که دارای مبدأ و مقیاس توافقی و قراردادی است و با آن، می‌توان نقاط روی محور و اعداد را به هم نسبت داد. سوم، یک بنیان دقیق که اعداد، عملگرها و انتقالات روی آن، بازنمایی می‌شوند. در سنت رایج آموزشی، اعداد گویا از دل اعداد صحیح با عملیات تقسیم و اعداد صحیح از دل اعداد طبیعی با عمل تفریق توسعه می‌یابند. در حالی‌که این موضوع روی محور اعداد، بدین شکل اتفاق نمی‌افتد. محور اعداد، به‌تدریج و با توسعهٔ مجموعهٔ اعداد، نقاط بیشتری را که از پیش موجود بوده‌اند، به نمایش می‌گذارد (فرودنتال، ۱۹۷۳). از لحاظ شهودی، توسعهٔ اعداد از مجموعهٔ اعداد طبیعی تا گویا، معمولاً با مشکلی مواجه نیست. تقسیم کردن بین دو واحد یا عدد صحیح مانند تقسیم کردن یک سیب یا یک تکه نان، ملموس و مطابق با شهود است. رابطهٔ بین مجموعه‌ها به‌شکل **ط**⊂**ص**⊂**گ** , ح ⊂ برقرار است و این رابطه به لحاظ شهودی، در راستای توسعهٔ اعداد روی محور اعداد است. در حالی‌که مجموعهٔ اعداد گنگ، تابع این سنت توسعه و ساخت شهودی اعداد نیست. با اینکه اعداد گنگ نیز به کمک اعداد گویا ساخته و حتی تعریف می‌شوند (عددی که برابر نسبت دو عدد گویا نیست)، ولی این بار مجموعه‌ای جدا از مجموعه‌های پیشین حاصل می‌شود. هر عدد طبیعی، در عین حال عددی صحیح و گویا نیز هست. ولی عدد گنگ، موجودی جدا و مستقل از اعداد پیشین است. علاوه بر این، حس نیاز به پیدایش اعداد گنگ

مثال ۱-۵

$۲+\sqrt{۷}$ چیست؟ یک عدد گنگ به علاوه یک عدد طبیعی
وچون $\sqrt{۷}$ جوابی دقیق (جذر کامل) ندارد نمی‌توانیم
حاصل جمع را بدست آوریم.

مثال ۲-۵

$۲+\sqrt{۷}$ چیست؟ مجموع عددی گنگ و عددی گویا که
روی محور می‌توان آن را نمایش داد

مثال ۶

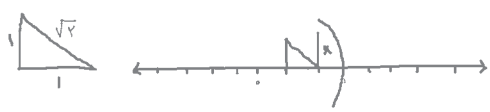
آیا می‌توان $\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}$ را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

خیر زیرا گنگ است. $۳\sqrt{۲}$

آیا می‌توان $\sqrt{۲}+\sqrt{۵}$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

نه چون دو رادیکال را نمی‌توان با هم جمع کرد.

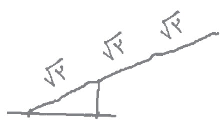
آیا می‌توان $\sqrt{۲}+۱$ را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟



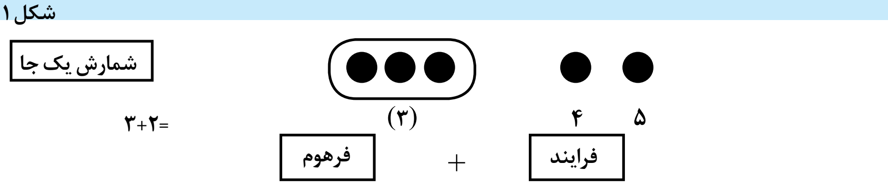
مثال ۷

آیا می‌توان $\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}$ را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه)؟

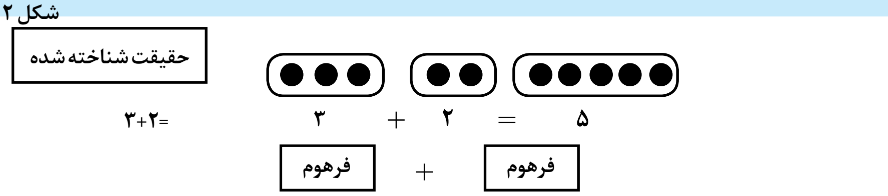
بله به کمک اندازه گیری $۳\sqrt{۲}$ را به $\sqrt{۲}$ اضافه می کنیم



شکل ۱



شکل ۲



در برنامه درسی ایجاد نمی‌شــود، لذا دانش‌آموز عدد گنگ را عددی اعشــاری یا گویا فرض می‌کند، با این تفــاوت که مقــدار دقیق و مکان معینــی روی محور ندارد. نتیجه این اســت که به‌جای توسـعهٔ مفهومی مجموعهٔ اعداد گویا به اعداد حقیقی، با جایگزین کردن تقریب‌های اعشاری برای اعداد گنگ، اعداد حقیقی به مجموعهٔ اعداد گویا تحدید می‌شود. در مطالعهٔ صورت گرفته، چه در قالب پاســخ به پرسش‌ها و چه در قالب مصاحبه‌ها، بیشتر دانش‌آموزان روش ساخت هندسی اعداد گنگ مربعی را می‌دانستند، ولی این نوع ساختن، دانشــی الگوریتمی و رویه‌ای بود که بین عدد گنگ و اندازه ارتباط معناداری ایجاد نمی‌کرد.

بــرای مثـال، در مصاحبه‌ها از دانش‌آموزان ســؤال شــد «چگونه می‌توان تکه چوبی را بــه اندازهٔ $\sqrt{۲}$ برش زد». بســیاری به‌دلیل نامتناهی بودن بخش اعشاری در بازنمایی اعشاری، این کار را ناممکن دانستند، در حالی‌که با روش هندسی این عدد را روی محور اعداد می‌ساختند. در عین حال، در ادامهٔ مصاحبه بیان می‌کردند که «اعداد گنــگ را نمی‌تــوان روی محور اعداد نمایــش داد، زیرا دقیق نیســتند». این تناقض‌گویی‌ها حاکی از آن است کــه دانش‌آمــوزان قادر نبودند بین عــدد مجموعه‌ای و عدد اندازه‌گیــری[۲۷]، ارتباط ایجاد نماینــد. محور اعداد حقیقــی، یک مدل ریاضی و ذهنی اســت که بین عدد و انــدازه ارتباط ایجاد می‌کند. به‌عبارتی، ویژگی ترتیبی و شمارشــی اعداد روی محور، بــه اندازهٔ یک پاره‌خط یا فاصلهٔ بین یک نقطه تا مبدأ مختصات، مرتبط می‌گردد.

محــور اعداد، محــل پیوند تفکر حســابی و تفکر هندســی است. جمع دو عدد شمارشــی[۲۸] (مقدار) در خارج محور، متناظر با جمع دو اندازه (فاصله) یا جمع دو عدد اندازه‌گیری روی محور است که منجر به ایجاد یک انــدازهٔ (فاصله) جدید می‌گردد. در تحقیق صورت گرفته، در رابطه با اعداد گنگ مربعی با شکل گستردهٔ نمایش ($\sqrt{ک}+\sqrt{ک}$ یا $\sqrt{ک}+ک$)، جمع حســابی با جایگزینی تقریب‌های اعشاری، یا ساده کردن رادیکال‌ها انجام شده اســت. در حالی‌که روی محور اعداد، جمع هندســی که آن را به‌عنوان جمع دو اندازه یا دو فاصله تعریف می‌کنیم، معنایی نیافته است.

در مثــال اخیر(مثــال ۶ و۷)، از دیــدگاه ریاضیات وابسته به جسم[۲۹]، بین استعارهٔ حرکت روی مسیر[۳۰] که منجر به ایجاد مدل محور اعداد می‌شود و استعارهٔ چوب اندازه‌گیری[۳۱] که جمع فاصله‌ها را با اعداد مرتبط می‌سازد، ارتباط عرضی مناســبی ایجاد نشده است، یعنی کارکرد محور به‌درستی شناخته نشده است (لکاف و نونِز، ۲۰۰۰).

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

از آنچه گفته شد، چنین برمی‌آید که رویکرد آموزشی اعداد گنگ در برنامهٔ درسی، چندان مناسب نیست. برنامهٔ درسی به آرامی از کنار مفهوم عدد گنگ که آخرین حلقهٔ تکمیل کنندهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی، اســت عبور کرده و به‌ســرعت، این مفهوم را با تأکید بر تقریبات اعشــاری، بــه مفهوم عددی گویا و «نادقیق» تقلیل داده اســت. در برنامهٔ درسی، حرکت از جنبهٔ فرایندی به جنبهٔ محصولی و جمع‌بنــدی نهایی عدد گنگ، به‌شــکل ناقصی صورت می‌پذیرد. در این میان، تأکید کتاب درسی و دانش‌آموزان بر عمل جذرگیری در رابطه با اعداد گنگ مربعی، موجب غلبهٔ دیدگاه عملیاتی و فرایندی در دانش‌آموزان می‌گردد. مبدأ تاریخی پیدایش مفهوم عدد گنگ، توســط یونانیان و ارائهٔ تعریف رســمی عدد گنگ توسط ددکیند در قرن نوزدهم میلادی، هر دو بر مبنای کمیات نامتوافق[۳۲] بوده است (ایوز، ۱۹۹۰). شاید بازگشت به این مبدأ و شروع از مفهــوم کمیات متوافق و نامتوافق، شــروع خوبی برای آموزش اعداد گنگ باشــد. فیشباین [۳۳] جِهیام و کوهن (۱۹۹۵) نیــز ایجــاد کنجــکاوی و پرســش از مفاهیم متوافــق[۳۴] و نامتوافق را آغازگر مناســبی برای تدریس اعــداد گنگ می‌داند. انتظار می رود که ایجاد حس نیاز اولیه در دانش‌آموزان به وجود اعداد گنگ، منجر به درک بهتر آنان از این اعداد شــود؛ حســی که در رویکرد فعلی آموزشی ایجاد نشده است. پایان‌بخش این مقاله، نقل قولی است که از لکاف و نونِز (۲۰۰۰)، از ددِکیند آورده‌اند: ددکیند خود، این حس را چنین تجربه نموده اســت: *اگر نقطهٔ p متناظر با عدد گویای a باشد، آن‌گاه چنانچه متداول است، op کمیتی متوافق با واحد اندازه‌گیری نامتغیری است که در ســاخت [محور] به‌کار گرفته شده است. ولی یونانیان باستان، این موضوع را از پیش می‌دانستند و اثبات کرده*

هر عدد طبیعی، در عین حال عددی صحیح و گویا نیز هست. ولی عدد گنگ، موجودی جدا و مستقل از اعداد پیشین است

بودند که همواره اندازه‌هایی نامتوافق با واحد اندازه‌گیریِ فرض شده، وجود دارند. اگر طول‌ها یا چنان اندازه‌هایی را از نقطهٔ مبدأ O روی امتداد خط [محور] قرار دهیم، نقاط انتهایی را خواهیم یافت که با هیچ عدد گویایی متناظر نمی‌باشند.... دامنهٔ اعداد گویا دیگر کفایت نخواهد کرد و کاملاً ضروری می‌نماید که دستگاه اعداد R (حقیقی) که با خلق اعداد گویا ساخته شده بود، این بار با خلق اعداد جدیدی توسعه یابد» (لکاف و نونز، ۲۰۰۰).

پی‌نوشت‌ها

1. structural
2. objective

۳. حتی نام اعداد گنگ در زبان انگلیسی از تعریف آن یعنی نسبت دو عدد صحیح با مخرج غیرصفر گرفته شده است. rational از واژهٔ انگلیسی ratio گرفته شده است. (نیون ۱۳۶۷)

۴. اثبات اینکه عدد ...۰/۳۳۳ با کسر $\frac{۱}{۳}$ دقیقاً برابر است با معلومات ابتدایی ریاضی امکان‌پذیر است.

5. Collis
6. closure
7. Acceptance of the lack of closure
8. Action-process-object- schema

این نظریه توسط دوبینسکی ارائه شده است.

9. reification
10. Sfard
11. Procept : ترکیبی از واژگان process و concept
12. Tall
13. Gray
14. Empirical abstraction
15. Semi-empirical abstraction
16. Conceived
17. Perceived
18. Procedure
19. process
20. Counting- all
21. Counting - on
22. Procept-process
23.Procept-procept
24. Known fact
25. Process-process
26. Freudenthal
27. Measuring number
28. Counting number,

این اصطلاح و اصطلاحاتی نظیر عدد اندازه گیری و عدد محاسباتی را فرودنتال(۱۹۹۹، ۱۹۷۳) در برخی کتب خود به‌کار برده است.

29. Embodied mathematics
30. Motion on the path metaphor
31. Measuring stick metaphor
32. Incommensurable
33. Fischbein
34. Commensurable

منابع

1. Collis, K. (1975). *The Development of Formal Reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.
2. Fisschbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The Concept of Irrational Numbers in High School Students and Prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics* , 29-44.
3. Freudenthal, H. (1999). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.*
4. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task. Kluwer.*
5. Lakoff, N., & Nunez, R. (2000). *where mathematics come from*? Basic Books.
6. Peled, I., & Hershkovits, S. (1999). Difficulties in Knowledge Integration: Revisiting Zeno’s Paradox with Irattional Numbers. *INT. J. Math. Educ. SCI. Technol.* , 39-46.
7. Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number Line-Where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* , 477-488.
8. Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* springer.
9. Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese* , 163-211.
10. Tall D., T. M. (1999). What Is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of Mathematical Behavior* .
11. Tall, D., & Gray, E. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. *PME* 15, (72-79). Assisi.
12. Voskoglou, M., & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. *Quaderni Di Ricerca in Didattica (Mathematics)* .
13. Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making Sensa of Irrational Numbers: Focusing on Representation. *PME* 28, (497-504).
14. Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Eduction American Mathematical Society.*

۱۵. ایوز، ه. و. (۱۹۹۰). **آشنایی با تاریخ ریاضیات**. ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل (۱۳۸۶). مرکز نشر دانشگاهی.

۱۶. پگ، ج.، تال، د. (۲۰۰۵). چرخهٔ بنیادین ساخت مفهوم: زیربنای چارچوب‌های نظری گوناگون. ترجمه حسین عبدی، محمدرضا فدایی و زهرا گویا (۱۳۸۶). مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۸، صص ۴ تا ۱۵، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۷. ساویزی، ب. (۱۳۹۱). **بررسی ساختار مفهومی اعداد گنگ در دانش آموزان**. رساله منتشر نشده دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی. واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی.

۱۸. نیون، ا. م. (۱۹۶۱). گویا و گنگ. ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا (۱۳۶۷). مرکز نشر دانشگاهی.